Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei »
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. III, fasc. 1–2

Geometria. — *Esistenza topologica di diramazioni negative per le curve doppie.* Nota di C. F. MANARA, presentata (*) dal Corrisp. O. CHISINI.

§ 1. – È nota l'importanza che ha, per lo studio delle curve di diramazione dei piani multipli, la conoscenza del comportamento topologico delle curve algebriche in relazione al piano proiettivo che le contiene. In mancanza di criteri generali, uno dei procedimenti più frequentemente usati per accertare tale comportamento è quello di far ricorso ad opportune curve limiti spezzate; ma, come è già stato avvertito da varii Autori (1), lo studio delle forme limiti presenta particolari difficoltà e, come vedremo, apparenti paradossi nel caso più significativo, cioè quando esse contengono parti doppie. Ora le accennate difficoltà si chiariscono e gli apparenti paradossi si eliminano quando si introduca per le curve doppie il concetto topologico di diramazione negativa.

È precisamente lo scopo di questa Nota l'introdurre ed illustrare questo concetto, con particolare riguardo all'inviluppo limite di una curva variabile che si spezzi venendo a contenere una parte doppia.

(*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) Cfr. per esempio O. ZARISKI, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch-curve.* « Am. Journal of Math. », (1929); TURPIN, *On the fundamental group of certain class of plane algebraic curves.* « Am. J. of Math. » (1937).

§ 2. – Prima di iniziare lo svolgimento della trattazione è necessario precisare in qual senso parleremo, in tutta la presente Nota, di « curve doppie » e di loro diramazioni.

L'espressione « curva multipla » può infatti indicare una curva algebrica f sui punti della quale sia definita una funzione algebrica a più valori; in particolare si può intendere per « curva doppia » una curva f sui punti della quale sia estratto un radicale quadratico $z = \sqrt{\varphi}$ (essendo $\varphi = 0$ una curva di ordine essenzialmente pari); sono allora punti di diramazione della curva doppia tutti i punti di f per i quali la z non prende valori funzionalmente distinti, punti che appartengono al gruppo delle intersezioni della f con la φ e che, come è chiaro, possono essere in numero grande quanto si vuole in dipendenza dell'ordine della φ stessa.

In tutta la presente Nota noi prenderemo invece l'espressione « curva doppia » in un senso diverso: intenderemo cioè con tale espressione una curva c di ordine n la quale, contata due volte, si pensi facente parte del limite di una curva variabile k di ordine $2n + r$ (con $r \geq 0$). Come è noto [2], l'inviluppo di una curva k d'ordine $2n + r$ che, variando con continuità venga a spezzarsi nella somma di una curva h, d'ordine r, e di una c d'ordine n, contata due volte, si compone al limite, oltre che dell'inviluppo di h e di quello di c contato due volte

a) degli nr fasci aventi centri nei punti Q comuni alla c ed alla h, ciascuno contato tre volte;

b) di certi fasci aventi come centri certi punti P di c dipendenti essenzialmente dal modo come la curva variabile k viene fatta tendere al limite. Come è chiaro, si può sempre pensare di farla variare in un fascio ottenuto combinando linearmente la curva limite $c^2 h$ con una curva l infinitamente vicina; si vede allora che i punti P vengono ad essere i punti comuni alla c ed alla l stessa e quindi sono $n(2n + r)$.

In particolare può essere evidentemente $r=0$, cioè può c^2 essere limite di una curva variabile k d'ordine $2n$; in tal caso non si dànno punti Q ed i punti P sono in numero di $2n^2$. In ogni caso diremo che i punti P sono punti di diramazione della curva doppia c^2 (doppia nel senso che abbiamo ora definito e precisato) con una denominazione che sarà pienamente illustrata e giustificata dall'analisi topologica che faremo nei prossimi paragrafi. Osserviamo intanto qui che essi possono essere considerati visibilmente anche come punti di diramazione di un radicale quadratico $z = \sqrt{k}$ che può pensarsi estratto sui punti di c.

Da quanto abbiamo fin qui esposto si potrebbe dedurre che non solo la posizione ma anche il numero delle diramazioni di una curva doppia c^2 dipendano essenzialmente dal modo come la c^2 stessa si ottiene come limite di una curva variabile k.

(2) Cfr. O. CHISINI, *Sulla riducibilità dell'equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia*. « Rend. Lincei », Serie 5ª vol. 26.

Vedremo invece come si possa dire che questo non è, in quanto riusciremo a dare un segno alle diramazioni di c^2 in modo che esse, contate col dovuto segno, abbiano sempre un numero complessivo di $2n^2$, numero dipendente quindi soltanto dall'ordine della curva c.

Vogliamo intanto qui rilevare come i risultati noti che abbiamo sopra ricordati, relativi all'inviluppo limite di una curva variabile k, possano a prima vista presentare un aspetto paradossale, in quanto ci si potrebbe aspettare che i fasci aventi centri nei punti Q, di cui si fa cenno sopra in *a*), si staccassero quattro e non tre volte dall'inviluppo limite, in quanto i punti Q stessi, intersezioni della curva semplice h e della curva doppia c^2 rappresentano coppie di punti doppi della curva limite complessiva c^2h. Anche questo apparente paradosso sarà spiegato dall'analisi topologica che inizieremo subito.

§ 3. – Una suggestiva rappresentazione visiva delle curve algebriche piane si ottiene, come è noto, in questo modo (3): data una curva algebrica $f(x, y) = 0$ si considerino nel piano Π_x della variabile complessa x i punti $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ radici del risultante $R(x) = 0$ di $f(x, y) = 0$ e di $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Si stabilisca poi nel piano stesso un sistema di cappii $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ che, partendo da un punto generico O avvolgano rispettivamente i punti $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ suddetti. Ordinati in qualche modo i cappii γ_i, si faccia percorrere in modo regolare al punto x la curva Γ somma di tutti i cappii γ_i nell'ordine stabilito, ed in corrispondenza si faccia muovere pure in modo regolare il piano Π_y della variabile complessa y traslandolo secondo la direzione normale alla sua giacitura; i punti y_i radici dell'equazione $f(x, y) = 0$ descrivono allora, durante questo movimento, delle linee mutuamente avvolgentisi, costituenti ciò che è stato chiamato (3) il « fascio caratteristico » della curva f. In particolare, detta α l'ascissa di un punto di diramazione semplice della funzione algebrica $y(x)$ definita implicitamente dalla $f(x, y) = 0$, punto in cui vengano a coincidere due valori y_1, y_2 della $y(x)$, quando x descrive il cappio γ che avvolge α il doppino dei fili descritti da y_1, y_2 riceve una torsione di $1/2$ giro; se α è ascissa di un nodo di f la torsione è di un giro intero; se α è ascissa di una cuspide la torsione è di $3/2$ giri ecc.

È ora facile verificare che il fascio caratteristico di una curva doppia c^2 si ottiene, per così dire, « raddoppiando » quello di c; più precisamente, considerato il fascio caratteristico di una curva k che, variando per continuità viene a spezzarsi contenendo come parte la c contata due volte, in posizione molto prossima al limite i fili costituenti il fascio caratteristico di c sono molto prossimi a coppie di fili di k, cosicchè il fascio di c^2 risulta composto da doppini costituiti da fili di k. Inoltre i punti P, centri di fasci che si staccano una volta dall'inviluppo limite, corrispondono a punti in cui tali doppini ricevono una torsione di $1/2$ giro, il che conferma l'opportunità di chia-

(3) Cfr. O. CHISINI, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*. « Rend. Ist. Lomb. », vol. 66 (1933).

mare tali punti di diramazione di c^2, in quanto si dà ivi per il fascio caratteristico della c^2 un comportamento topologico del tutto analogo a quello che esiste nei punti di diramazione di una funzione algebrica $y(x)$.

Osserviamo ora che, essendo possibile distinguere due versi opposti di percorrenza della curva Γ somma dei cappii γ_i e due versi opposti di movimento del piano Π_y è possibile definire un segno per le diramazioni di una funzione $y(x)$ come pure per quelle di una curva doppia c^2. Stabiliremo di dire che la diramazione corrispondente ad un punto $x = \alpha$ è positiva se descrivendo x in senso positivo (antiorario) il cappio γ che circonda α, i due punti del piano Π_y descriventi il doppino che riceve una torsione di 1/2 giro in corrispondenza di α stesso girano in senso pure antiorario attorno al loro baricentro rispetto ad un osservatore che veda il piano Π_y venirgli incontro. È ora facile vedere che tutte le diramazioni della funzione algebrica $y(x)$ definita da una curva algebrica irriducibile $f(x, y) = 0$ sono, nel senso che abbiamo testè definito, positive [4]. Lo stesso si può dire per le diramazioni di una curva doppia c^2 che cadono nei punti P di cui sopra; per una tale curva però, come dirà la verifica analitica che faremo subito, si dànno anche dei punti in cui la torsione del doppino di fili costituenti il fascio caratteristico è di senso opposto a quello che si ha nei punti P; diremo pertanto che in quei punti si ha una « diramazione negativa » della curva doppia c^2.

§ 4. – Prendiamo dunque in esame il fascio caratteristico di una curva doppia. Sussiste il

TEOREMA: *Nei punti Q comuni alla parte doppia ed alla parte semplice in cui degenera una curva variabile k la parte doppia possiede una diramazione negativa (nel senso sopra spiegato).*

Essendo evidentemente il fatto di carattere differenziale lo potremo verificare su di un semplice esempio con la sicurezza che le deduzioni varranno in tutta generalità. Sia k la cubica variabile nel fascio

$$y^3 + x y^2 = \lambda \tag{1}$$

cubica che al limite per $\lambda = 0$ si spezza nella retta $y = 0$ doppia e nella retta $y = -x$; esiste un solo punto Q, l'origine delle coordinate, e sulla parte doppia non esistono visibilmente al finito altri punti notevoli.

Fissato un valore $\bar{x}$ di x, per esempio posto $\bar{x} = 1$, è facile vedere che delle tre radici dell'equazione

$$y^3 + \bar{x} y^2 = \lambda \tag{2}$$

due, che chiameremo y_1 ed y_2, tendono a zero e la terza, che diremo y_3, tende a $-\bar{x}$ quando λ tende a zero. Un più preciso esame porta a rappresentare complessivamente y_1 ed y_2 nella forma

$$y = \sqrt{\lambda/\bar{x}} + \cdots \tag{3}$$

(4) Cfr. O. CHISINI, *Forme canoniche per il fascio caratteristico di una curva algebrica piana*. « Rend. Ist. Lomb. », vol. 70 (1937).

dove i termini tralasciati sono infinitesimi di ordine superiore ad $1/2$ rispetto a λ, ed y_3 nella forma

$$y = -\bar{x} + \cdots \tag{4}$$

essendo i termini tralasciati infinitesimi con λ.

L'esame delle (3) e (4) porta a concludere che, dato a λ un valore opportunamente piccolo, quando si faccia percorrere ad $\bar{x}$ il cerchio $|\bar{x}| = 1$ in senso antiorario, il doppino di fili descritti da y_1 ed y_2 ha una torsione negativa di $1/2$ giro mentre il filo descritto da y_3 gira una volta in senso positivo attorno al doppino stesso.

§ 5. – Dopo quanto abbiamo esposto e la verifica fatta al precedente paragrafo, basta l'osservazione che i punti P in cui una curva doppia c^2 presenta diramazione positiva sono in numero di $n(2n+r)$ mentre i punti Q in cui presenta diramazione negativa sono nr per autorizzarci a concludere che

« Il numero delle diramazioni di una curva doppia c^2 di ordine n, contate col dovuto segno è sempre di $2n^2$ » ossia che il fascio caratteristico di una curva doppia c^2 è costituito da doppini possedenti sempre in definitiva $2n^2$ torsioni di $1/2$ giro.

L'analisi topologica che abbiamo condotta a termine permette poi di render conto della circostanza apparentemente paradossale a cui accennavamo alla fine del § 2: che cioè i fasci aventi centri nei punti Q comuni alla parte semplice ed alla parte doppia in cui si spezza una curva variabile k si stacchino solo tre volte dall'inviluppo limite, mentre i punti Q stessi figurano come coppie di punti doppii, della curva limite spezzata. Il fatto è dovuto, come è facile verificare, alla presenza di una diramazione negativa della parte doppia in Q; il che prova come l'introduzione di questo concetto possa servire a spiegare quanto i risultati puramente numerativi lasciano di parzialmente oscuro e di non tranquillizzante.

Roma, 1947. — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.